УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОРОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГРАНИЧНО-ВРЕМЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ[1)]

А.А. БЕЛОВ, А.В. АМЕНИЦКИЙ, С.Ю. ЛИТВИНЧУК, А.Н. ПЕТРОВ

НИИМ Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
E-mail andrey.petrov@mech.unn.ru

TIME DOMAIN DYNAMIC BEM MODELLING OF POROELASTIC HALF-SPACE.

A.A. BELOV, A.V. AMENITSKIY, S.Y. LITVINCHUK, A.N. PETROV

Research Institute of Mechanics of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

Аннотация

Представлены задачи о действии вертикальной силы на дневную поверхность пороупругого полупространства и приведены результаты расчетов по дренированной и недренированной моделям материала с целью получения гранично-элементных оценок пороупругого решения. Приведены результаты исследований для нагрузки хевисайдовского вида и разности функций хевисайдовского вида.

Ключевые слова: метод граничных элементов, пороупругость, динамика, преобразование Лапласа

Summary

Problems of vertical load acting on the surface of a poroelastic half-space are considered. Results obtained by drained and undrained material models are used in order to acquire boundary-element estimations of poroelastic solution. Research results for Heaviside-type load and Heaviside-type functions difference load are presented.

Summary of paper

Key words: boundary element method, poroelasticity, dynamics, Laplace transform.

Введение

Исследование волновых процессов в пороупругих телах представляет научный и практический интерес. Для широкого диапазона насыщенных материалов упругая теория является грубым приближением при исследовании распространения волн. Для учета пористости широко используется теория М. Био [1,2]. Методика исследований, представленная в работе, основана на граничных интегральных уравнениях прямого подхода трехмерной изотропной линейной теории пороупругости, математическая модель которой записывается в терминах четырех базовых функций - перемещения упругого скелета и порового давления; на интегральном преобразовании Лапласа и шаговом методе его численного обращения; на методе граничных элементов как способе компьютерного моделирования искомых решений.

1. Гранично-элементное моделирование

Детали редукции исходной начально-краевой задачи трехмерной теории пороупругости к эквивалентной системе разрешающих гранично-интегральных уравнений (ГИУ) можно найти в [3, 4].

[1)] Выполнено при частичном финансировании Программой государственной поддержки научных школ РФ (грант НШ-593.2014.8) и РФФИ (гранты 14-08-31415-мол-а, 13-08-00658-а, 12-01-00698-а)

Чтобы ввести гранично-элементную дискретизацию, рассматриваем регуляризованное уравнение:

$$\alpha_\Omega \tilde{v}_k(x,t) + \int_0^t \int_\Gamma (\tilde{T}_{ik}(x,y,t-\tau)\tilde{v}_i(y,\tau) - \tilde{T}^0_{ik}(x,y,t-\tau)\tilde{v}_i(x,\tau))d\Gamma d\tau -$$

$$- \int_0^t \int_\Gamma (\tilde{G}_{ik}(x,y,t-\tau)\tilde{t}_i(y,\tau))d\Gamma d\tau = 0,$$

$$x \in \Gamma,\ \tilde{t} = [t_1, t_2, t_3, q]^T,\ \tilde{v} = [u_1, u_2, u_3, p],$$

где u, t — перемещения и силы; p, q — давление и поток; $\tilde{G}, \tilde{T}$ — матрицы фундаментальных и сингулярных решений, а $\tilde{T}^0$ — особенности сингулярных решений.

Для решения ГИУ по времени использован следующий алгоритм [5]. Пусть имеем интеграл

$$y = \int_0^t f(\tau)d\tau,$$

тогда можно построить квадратурную формулу

$$y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \omega_{n-k}(\Delta t),\ n = 0, 1, \ldots, N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \bar{f}\left(\gamma\left(Re^{il2\pi L^{-1}}\right)/\Delta t\right) e^{iln2\pi L^{-1}},$$

$$\gamma(z) = \frac{3}{2} - 2z + \frac{z^2}{2},$$

где $\bar{f}$ — изображение по Лапласу функции f. При условии того, что функция $\bar{f}(s)$ в уравнении вычисляется с некоторой погрешностью ε, выбор $L = 2N$ и $R^n = \sqrt{\varepsilon}$ допускает погрешность вычисления ω_n порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$.

2. Численные результаты

Рассмотрим гранично-элементные решения задачи [6] о действии вертикальной силы $t_3(t) = t^0 f(t)$, $t^0 = -1000$ Н/м^2 на поверхность однородного пороупругого полупространства (рис. 1).

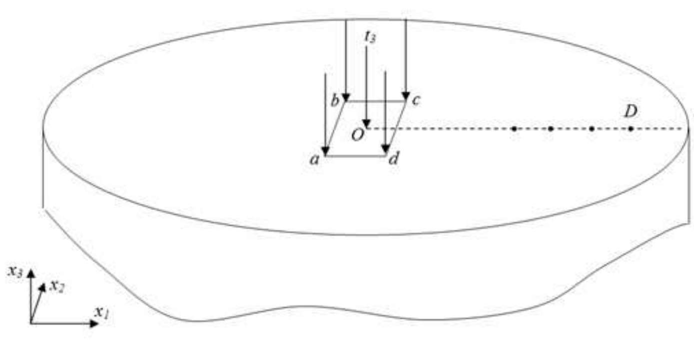

Рис. 1: Постановка задачи

В качестве закона изменения приложенной нагрузки возьмем функцию Хевисайда $f(t) = H(t)$ и разность функций Хевисайда $f(t) = H(t) - H(t - 0.005)$. Дневная поверхность полупространства свободная и проницаемая: на дневной поверхности задано поровое давление $p = 0$ и поверхностные силы

$t_i(t) = 0$ $(i = 1 \ldots 3)$, кроме участка $abcd$, где $t_3(t) = t^0 f(t)$. Площадь участка $abcd$ составляет 1 м^2. Динамические отклики снимаются в точке D, расположенной в пятнадцати метрах от места приложения нагрузки. В качестве пороупругого материала возьмем скальную породу с параметрами: $K = 8 \cdot 10^9$ Н/м^2, $G = 6 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho = 2458$ кг/м^3, $\phi = 0.19$, $K_s = 3.6 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho_f = 1000$ кг/м^3 $K_f = 3.3 \cdot 10^9$ Н/м^2, $k = 1.9 \cdot 10^{-10}$ м^4/(Н $\cdot$ с). Параметры шагового метода выбраны следующие: $N = 1000$, $L = 1000$, $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$. На рис. 2–3 представлены решения для случая $f(t) = H(t)$, на рис. 4-5 для случая $f(t) = H(t) - H(t - 0.005)$. На всех рисунках линия — соответствует пороупругой модели, линия — — дренированной, линия — — недренированной модели.

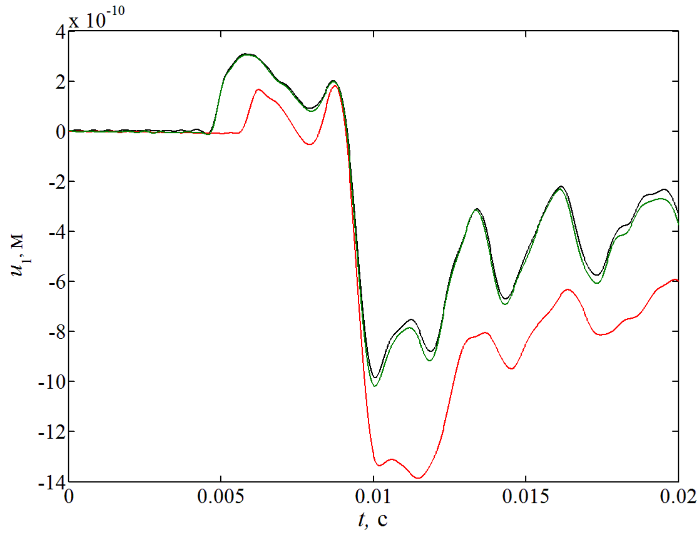

Рис. 2: Горизонтальные перемещения для случая $f(t) = H(t)$

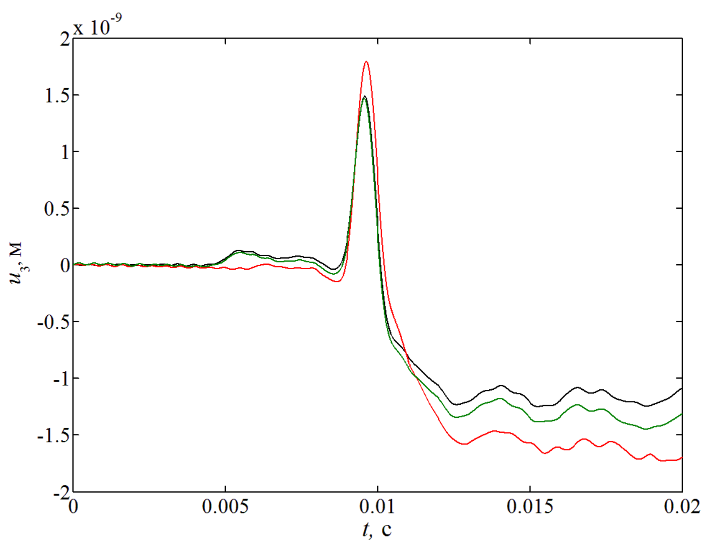

Рис. 3: Вертикальные перемещения для случая $f(t) = H(t)$

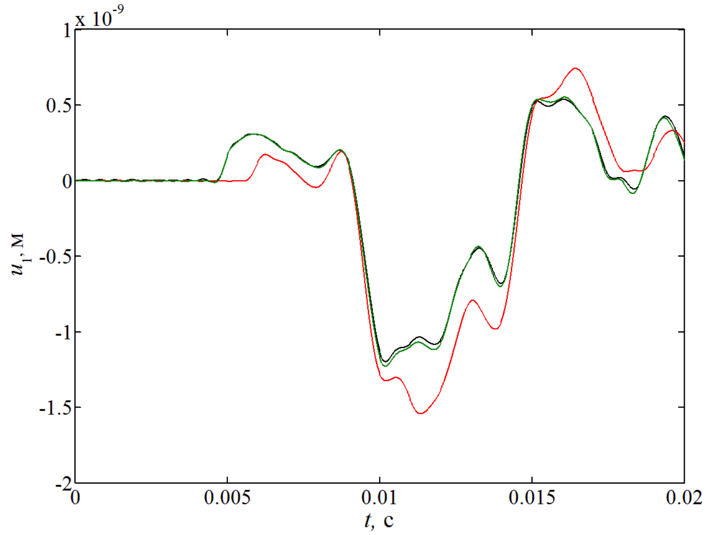

Рис. 4: Вертикальные перемещения для случая $f(t) = H(t) - H(t - 0.005)$

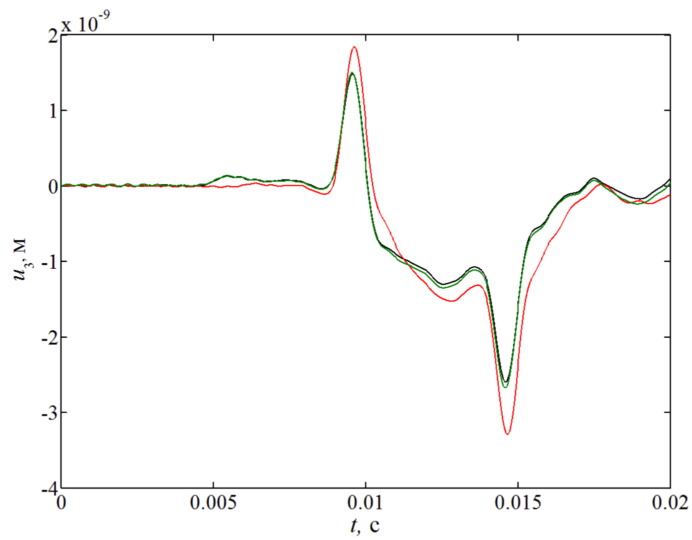

Рис. 5: Вертикальные перемещения для случая $f(t) = H(t) - H(t - 0.005)$

На графиках ярко выражены приходы продольной волны первого рода ($t_p \approx 0.0047$), поперечной волны ($t_s \approx 0.0096$) и волны Рэлея ($t_R \approx 0.0087$). Гранично-элементные расчеты по дренированной и недренированной моделям материала демонстрируют значительное влияние второй фазы на динамический отклик перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Biot M.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, № 2. – P. 168–178.

2. **Biot M.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, № 2. – P. 179-191.
3. **Аменицкий А.В., Игумнов Л.А., Карелин И.С.** Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. Вып. 70. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. – С. 71–78.
4. **Баженов В.Г., Игумнов Л.А.** Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. – М: Физматлит, 2008. – 352 с.
5. **Schanz M.** Wave Propogation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. – Berlin Springer, 2001. – 170 p.
6. **Игумнов Л.А., Карелин И.С., Петров А.Н., Петров А.Е.** Гранично-элементное исследование поверхностных пористо-упругих волн // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. – Вып. 75(2). – С. 137–144.

REFERENCES

1. **Biot M.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, № 2. – P. 168–178.
2. **Biot M.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, № 2. – P. 179–191.
3. **Amenitskiy A.V., Igumnov L.A., Karelin I.S.** Boundary element method development for solving the wave propagation problem in porous media [Razvitie metoda granichnyh jelementov dlja reshenija problemy rasprostranenija voln v poristyh sredah] // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhvuz. sbornik. Issue 70. – N.Novgorod: Izd-vo NNGU, 2008. – P. 71–78. (in Russian)
4. **Bazhenov V.G., Igumnov L.A.** Boundary integral equations method and boundary elements method in solving the problems of the three-dimensional dynamic elasticity theory with coupled fields [Metody granichnyh integral'nyh uravnenij i granichnyh jelementov v reshenii zadach trehmernoj dinamicheskoj teorii uprugosti s soprjazhennymi poljami]. – Moscow.: Fizmatlit, 2008. – 352 p. (in Russian)
5. **Schanz M.** Wave Propogation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. – Berlin Springer, 2001. – 170 p.
6. **Igumnov L.A., Karelin I.S., Petrov A.N., Petrov A.E.** Boundary-element study of the surface porous-elastic waves [Granichno-jelementnoe issledovanie poverhnostnyh poristo-uprugih voln] // Problemy prochnosti i plastichnosti. Mezhvuz. sb. – Nizhnij Novgorod: Izd-vo NNGU, 2013. – Issue 75, Part 2. – P. 137–144. (in Russian)